YÜZEYLER TEORİSİ ARA SINAV SORULARI (21.11.2018)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) $\alpha : I \to E^3$, $\alpha(t) = (2 + \sin t \cos t,\ 5 + \cos t, 7 + \sin^2 t)$ eğrisinin bütün normal düzlemlerinin $(2,5,7)$ noktasından geçtiğini ispatlayınız**(20P.)**.

2.) E^3 de M, denklemi $x_1^2 + x_2^2 = 1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to M,\ \alpha(t) = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ ct+b)$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik olup olmadığını araştırınız **(20P.)**.

3.) $Z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu nokta $(0, 1, 0)$ noktasına en yakın nokta olsun(Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanılacak) **(20P.)**.

4.) $M_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4 \} \subset E^3$,

$M_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0 \} \subset E^3$

yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q = \left(1, \sqrt{3}, ?\right)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz **(20P.)**.

5.) E^3 de bir yüzey M olsun. M nin parametrik ifadesi

$$\begin{array}{ccc} \Phi : I \times J \subset E^2 & \to & E^3 \\ (u, v) & \to & \Phi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)) \end{array}$$

olsun. $\{\Phi_u, \Phi_v\}$ sistemi $\chi(M)$ için bir ortogonal baz olsun. $V_1 = \frac{\Phi_u}{\|\Phi_u\|}$, $V_2 = \frac{\Phi_v}{\|\Phi_v\|}$ olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$N = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|} \Phi_u \wedge \Phi_v$ olsun. Bu durumda, $\frac{dN}{du}$ nin en sade şeklini hesaplayınız **(20P.)**.

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

Yüzeyler Teorisi Ara Sınavı (21.11. 2018)

C-1 $Sp\{N, B\}$ tarafından gerilen normal düzlemin denklemini bulalım:

Y, normal düzlemde alınan temsilci bir nokta olsun.

$\overrightarrow{\alpha(t)Y}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ vektörleri aynı düzlemde olduklarından lineer bağımlıdırlar. Dolayısıyla,

$$\det(\overrightarrow{\alpha(t)Y}, \vec{N}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \vec{N}\times\vec{B} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \alpha'(t) \rangle = 0.$$

$Y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ olsun.

$$\overrightarrow{\alpha(t)Y} = Y - \alpha(t) = (y_1 - 2 - \sin t\cos t, \ y_2 - 5 - \cos t, \ y_3 - 7 - \sin^2 t) \ \cdots (1)$$

$\alpha(t) = (2 + \underbrace{\sin t \cos t}_{\frac{1}{2}\sin 2t}, \ 5 + \cos t, \ 7 + \sin^2 t)$ old. dan

$$\alpha'(t) = (\tfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cos 2t, \ -\sin t, \ \underbrace{2\sin t\cos t}_{\sin 2t})$$

$$\Rightarrow \alpha'(t) = (\cos 2t, \ -\sin t, \ \sin 2t) \ --- (2)$$

bulunur. $\langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \alpha'(t) \rangle = 0$ Normal düzlem denklemini verdiğinden (1) ve (2) ifadelerinden

$$(\cos 2t)(y_1 - 2 - \tfrac{1}{2}\sin 2t) + (-\sin t)(y_2 - 5 - \cos t) + (\sin 2t)(y_3 - 7 - \sin^2 t) = 0$$

normal düzlem denklemidir.

$(2, 5, 7)$ bu denklemi sağlarsa, bütün normal düzlemlerinin $(2, 5, 7)$ noktasından geçtiğini söyleriz.

$$(\cos 2t)(\cancel{2} - \cancel{2} - \tfrac{1}{2}\sin 2t) + (-\sin t)(\cancel{5} - \cancel{5} - \cos t) + (\sin 2t)(\cancel{7} - \cancel{7} - \sin^2 t) \overset{?}{=} 0$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos 2t \sin 2t + \sin t\cos t - \sin 2t \sin^2 t$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos 2t\sin 2t + \sin t\cos t - 2\sin t\cos t\sin^2 t$$

$$= -\tfrac{1}{2}(1 - 2\sin^2 t)(2\sin t\cos t) + \sin t\cos t - 2\sin t\cos t\sin^2 t$$

$$= (-\tfrac{1}{2} + \sin^2 t)(2\sin t\cos t) + \sin t\cos t - 2\sin t\cos t\sin^2 t$$

$$= -\cancel{\sin t\cos t} + 2\sin t\cancel{\cos t}\sin^2 t + \cancel{\sin t\cos t} - 2\sin t\cancel{\cos t}\sin^2 t$$

$= 0$. Buna göre, bütün normal düzlemleri $(2, 5, 7)$ noktasından geçer.

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \\ &\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \\ &\sin 2t = 2\sin t\cos t \end{aligned}}$$

Yüzeyler Teorisi Ara Sınavı (21.11.2018)

C − 2) E^3 de M, denklemi $x_1^2+x_2^2=1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a,b,c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow M\\ t &\longrightarrow \alpha(t)=(\cos(at+b),\sin(at+b),ct+d)\end{aligned}$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik eğri olup olmadığını araştıralım.

$$\alpha'(t)=(-a\sin(at+b),\ a\cos(at+b),\ c)$$

$$\alpha''(t)=(-a^2\cos(at+b),\ -a^2\sin(at+b),\ 0)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-1=0 \Rightarrow \nabla f=2(x_1,x_2,0)$$

$$\Rightarrow N=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=\frac{2(x_1,x_2,x_3)}{2\sqrt{\underbrace{x_1^2+x_2^2}_{1}}}$$

$$\Rightarrow \vec{N}=(x_1,x_2,0).$$

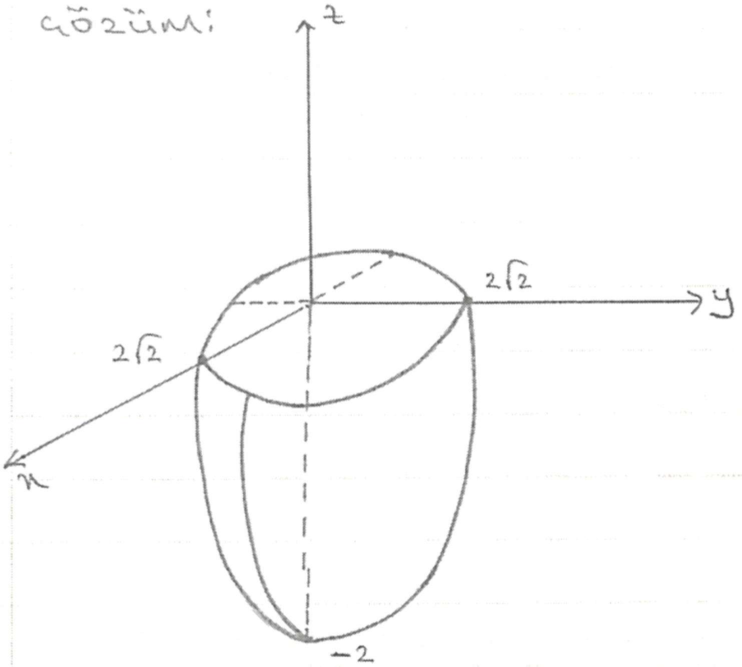
$$N\Big|_{\alpha(t)}=(\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ 0).$$

Buna göre $\alpha''(t)=-a^2 N\Big|_{\alpha(t)}$ olduğundan $\alpha''(t)\perp T_M\,\alpha(t)$.

O halde α eğrisi, silindir üzerinde bir geodeziktir.

Cevap: 3; $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun (Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanınız).

Çözüm:



$$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2-8}{4}$$

$\Rightarrow x^2+y^2-4z-8=0$ bulunur.

Buradan,

$g(x,y,z)=x^2+y^2-4z-8=0$

ve (x,y,z) ile $(0,1,0)$ noktaları arasındaki uzaklık ifadesinden

$f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$

yazabiliriz.

$\nabla g=(2x, 2y, -4)$,

$\nabla f=(2x, 2(y-1), 2z)$

olduğundan Lagrange çarpan teoreminden

$$\nabla f=\lambda \nabla g$$

veya buradan

$$(x, y-1, z)=\lambda(x, y, -2)$$

olup, söz konusu noktada

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ y-1=\lambda y \\ z=-2\lambda \\ x^2+y^2-4z=8 \end{cases}$$

sağlanmalıdır. Eğer $x\neq 0$ ise $\lambda=1$ olur. Bu ise $y-1=\lambda y$ den $-1=0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $x=0$ olmalıdır.

$x=0$, $y=\frac{1}{1-\lambda}$, $z=-2\lambda$ değerini son denklemde yerine yazarsak

$$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8 \Rightarrow \frac{1+8\lambda(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2}=8$$

$$\Rightarrow 8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$$

$1/2$	8	-24	24	-7
		4	-10	7
	8	-20	14	0

$\Rightarrow (\lambda-\frac{1}{2})(8\lambda^2-20\lambda+14)=0$

$\Rightarrow (\lambda-\frac{1}{2})(4\lambda^2-10\lambda+7)=0$

$4\lambda^2-10\lambda+7=0$ denkleminin köklerini araştıralım:

$\Delta=b^2-4ac$ den $\Delta=100-4.4.7=-12<0$ olduğundan kökler sanaldır. Buna göre,

$8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$ denkleminin yalnız bir reel kökü vardır ve o da $\lambda=\frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, f için M üzerinde $z=-1$, $x=0$ ve $x^2+y^2-4z=8$ den $0+y^2-4.(-1)=8 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\mp 2$.

$A_1=(0,-2,-1)$, $A_2=(0,2,-1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f(A_1)=10$, $f(A_2)=2$ olduğundan; $A_2=(0,2,-1)\in M$ noktası $(0,1,0)$ noktasına M üzerinde en yakın noktadır.

$\lambda=\frac{1}{2}$ için $z=-2\lambda$ dan $z=-2.\frac{1}{2}=-1$.

Cevap: 4 $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\} \subset E^3$,
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0\} \subset E^3$
yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q = (1, \sqrt{3}, ?)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz.

Çözüm: $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2\cos t,\ x_2 = 2\sin t$ yazabiliriz.

$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow 4\cos^2 t - 4\sin^2 t = 2x_3$

$$\Rightarrow x_3 = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t = 2\underbrace{(\cos^2 t - \sin^2 t)}_{\cos 2t}$$

$$\Rightarrow x_3 = 2\cos 2t.$$

Buna göre; M_1 ve M_2 yüzeylerinin arakesit eğrisinin bir parametrizasyonu

$$\alpha : I \longrightarrow M_1 \cap M_2 \subset E^3$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 2\cos 2t)$$

dir. Buradan,

$$\left.\begin{array}{l} x_1(P) = 1 \Rightarrow 1 = 2\cos t \Rightarrow \cos t = 1/2 \\ x_2(P) = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = 2\sin t \Rightarrow \sin t = \sqrt{3}/2 \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

$x_3(P) = 2\cos 2.\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ dir. O halde,
$Q = (1, \sqrt{3}, -1)$ olarak elde edilir.

$\alpha'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ -4\sin 2t) \Rightarrow \alpha'(\pi/3) = (-\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{3})$,
$\alpha''(t) = (-2\cos t, -2\sin t, -8\cos 2t) \Rightarrow \alpha''(\pi/3) = (-1, -\sqrt{3}, 4)$,
$\alpha'''(t) = (2\sin t, -2\cos t, 16\sin 2t) \Rightarrow \alpha'''(\pi/3) = (\sqrt{3}, -1, 8\sqrt{3})$.

$$k_1(\pi/3) = \frac{\|\alpha'(\pi/3) \times \alpha''(\pi/3)\|}{\|\alpha'(\pi/3)\|^3} \quad \text{ve} \quad k_2(\pi/3) = \frac{\det(\alpha'(\pi/3), \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3))}{\|\alpha'(\pi/3) \times \alpha''(\pi/3)\|^2}$$

formüllerinden $k_1(\pi/3)$ ve $k_2(\pi/3)$ değerlerini hesaplayalım.

$$\alpha'(\pi/3) \times \alpha''(\pi/3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 4 \end{vmatrix} = -2e_1 + 6\sqrt{3}\,e_2 + 4e_3$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\pi/3) \times \alpha''(\pi/3)\| = \sqrt{(-2)^2 + (6\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{128} = \sqrt{2.64} = 8\sqrt{2}.$$

$$\| \alpha'(\pi/3) \| = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{aligned}\det(\alpha'(\pi/3), \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3)) &= \langle \alpha'(\pi/3) \wedge \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3) \rangle \\ &= \langle (-2, 6\sqrt{3}, 4), (\sqrt{3}, -1, 8\sqrt{3}) \rangle \\ &= -2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 32\sqrt{3} \\ &= 24\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$k_1(\pi/3) = \frac{8\sqrt{2}}{16.4} = \frac{\sqrt{2}}{8},$$

$$k_2(\pi/3) = \frac{\overset{3}{\cancel{24}}\sqrt{3}}{\underset{8}{\cancel{64}}.2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \text{ bulunur.}$$

Yüzeyler Teorisi Ara Sınavı (21.11.2018)

C-5)

$$N = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|} \Phi_u \wedge \Phi_v$$ dir. Buradan,

$$N = (\Phi_u \wedge \Phi_v)\left[\langle \Phi_u, \Phi_u\rangle^{-1/2} \cdot \langle \Phi_v, \Phi_v\rangle^{-1/2}\right]$$ yazılabilir.

$$\frac{dN}{du} = \frac{\Phi_{uu} \wedge \Phi_v + \Phi_u \wedge \Phi_{vu}}{\|\Phi_u\| \|\Phi_v\|} - \frac{1}{2} \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{uu}, \Phi_u\rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{uu}\rangle}{\langle \Phi_u, \Phi_u\rangle^{3/2} \cdot \langle \Phi_v, \Phi_v\rangle^{1/2}}$$

$$- \frac{1}{2} \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{vu}, \Phi_v\rangle + \langle \Phi_v, \Phi_{vu}\rangle}{\langle \Phi_v, \Phi_v\rangle^{3/2} \cdot \langle \Phi_u, \Phi_u\rangle^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{du} = \frac{\Phi_{uu} \wedge \Phi_v + \Phi_u \wedge \Phi_{vu}}{\|\Phi_u\| \cdot \|\Phi_v\|} - \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_u, \Phi_{uu}\rangle}{(\|\Phi_u\|^2)^{3/2} \cdot \|\Phi_v\|}$$

$$- \Phi_u \wedge \Phi_v \frac{\langle \Phi_{vu}, \Phi_v\rangle}{\underbrace{(\|\Phi_v\|^2)^{3/2}}_{\|\Phi_v\|^3} \cdot \|\Phi_u\|}$$

elde edilir.